Université A. MIRA de Béjaia
Faculté Sciences Exactes **L2.**
Département Informatique

Logique mathématique

Correction de la série de TD 2 (2014-2015)

Exercice 1 :

1. Montrons que : $\alpha \Rightarrow \gamma, \beta \Rightarrow \sigma, \overline{\gamma} \vee \vee \overline{\sigma} \Rightarrow \overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$.

Preuve :

(1) $\alpha \Rightarrow \gamma$, ... Hypothèse 1.
(2) $\beta \Rightarrow \sigma$, ... Hypothèse 2.
(3) $\overline{\gamma} \vee \overline{\sigma}$, ... Hypothèse 3.
(4) $\overline{\sigma} \vee \overline{\gamma}$, ... Règle III sur (3).
(5) $\sigma \Rightarrow \overline{\gamma}$, ... Abréviation $\Rightarrow$.
(6) $\beta \Rightarrow \overline{\gamma}$, ... Règle S (2, 5).
(7) $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$, ... Définition $\Rightarrow$.
(8) $\overline{\gamma} \vee \overline{\beta}$, ... Règle III sur (7).
(9) $\gamma \Rightarrow \overline{\beta}$, ... Abréviation $\Rightarrow$.
(10) $\alpha \Rightarrow \overline{\beta}$, ... Règle S (1, 9).
(11) $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$, ... Définition $\Rightarrow$.

■

2. Montrons que : $\alpha \Rightarrow \beta, \gamma \Rightarrow \sigma \vdash \alpha \wedge \gamma \Rightarrow \beta \vee \sigma$.

Preuve :

(1) $\alpha \Rightarrow \beta$, ... Hypothèse 1.
(2) $\gamma \Rightarrow \sigma$, ... Hypothèse 2.
(3) $x \Rightarrow (x \vee y)$, ... $(H.A)_2$.
(4) $\beta \Rightarrow \beta \vee \sigma$, ... Substitution $(x := \beta, y := \sigma)$ dans (3).
(5) $\alpha \Rightarrow \beta \vee \sigma$, ... Règle S (1, 4).
(6) $(x \wedge y) \Rightarrow x$, ... Théorème 15.
(7) $(\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow \alpha$, ... Substitution $(x := \alpha, y := \gamma)$ dans (6).
(8) $(\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow \beta \vee \sigma$, ... Règle S (7, 5).

■

Exercice 2 :

1. Montrons que : $\vdash \overline{\overline{\beta}} \Rightarrow \beta$.

Preuve :

(1) $x \Rightarrow \overline{\overline{x}}$, ... Condition nécessaire du Théorème 2.
(Remarque : Ce que nous allons démontrer c'est la condition suffisante de ce théorème, donc on peut supposé que la condition nécessaire est démontrée et l'utilisée mais on ne peut pas utiliser le théorème en entier directement.)

(2) $\overline{x} \vee \overline{\overline{x}}$,..... Définition de $\Rightarrow$.

(3) $\overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{x}}$, ... Substitution ($x := \overline{x}$) dans (2).

(4) $\overline{x} \Rightarrow \overline{\overline{x}}$, ... Abréviation de $\Rightarrow$.

(5) $x \vee \overline{x} \Rightarrow x \vee \overline{\overline{x}}$, ... Règle IV.

(6) $x \vee \overline{x}$, ... Théorème 4.

(7) $x \vee \overline{\overline{x}}$, ... Modus Ponens (6, 5).

(8) $\beta \vee \overline{\overline{\beta}}$, ... Substitution ($x := \beta$).

(9) $\overline{\overline{\beta}} \vee \beta$, ... Règle III.

(10) $\overline{\overline{\beta}} \Rightarrow \beta$, ... Abréviation $\Rightarrow$.

■

2. Montrons que : $\vdash \beta \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}$.

Preuve :

(1) $x \vee \overline{x}$, ... Théorème 4.

(2) $\overline{\beta} \vee \overline{\overline{\beta}}$, ... Substitution ($x := \overline{\beta}$) dans (1).

(3) $\beta \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}$, ... Abréviation $\Rightarrow$.

■

3. Montrons que : $\vdash \overline{\alpha} \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$.

Preuve :

(1) $x \Rightarrow (x \vee y)$, ... $(H.A)_2$.

(2) $\overline{\alpha} \Rightarrow (\overline{\alpha} \vee \beta)$, ... Substitution ($x := \overline{\alpha}, y := \beta$) dans (1).

(3) $\overline{\alpha} \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$, ... Abréviation $\Rightarrow$.

■

4. Montrons que : $\vdash (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow [(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta]$.

Preuve :

(1) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow [(z \vee x) \Rightarrow (z \vee y)]$, ... $(H.A)_4$

(2) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow [(\beta \vee \alpha) \Rightarrow (\beta \vee \beta)]$, ... Substitution ($x := \alpha, y := \beta, z := \beta$).

(3) $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\overline{y} \Rightarrow \overline{x})$, ... Théorème 5.

(4) $\Big[(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\overline{y} \Rightarrow \overline{x})\Big] \wedge \Big[(\overline{y} \Rightarrow \overline{x}) \Rightarrow (x \Rightarrow y)\Big]$, ... Définition $\Leftrightarrow$.

(5) $\Big[(\overline{y} \Rightarrow \overline{x}) \Rightarrow (x \Rightarrow y)\Big]$, ... Règle V.

(6) $(\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$, ... Substitution $(x := \alpha, y := \beta)$.

(7) $(\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow \Big[(\beta \vee \alpha) \Rightarrow (\beta \vee \beta)\Big]$, ... Règle S (2, 6).

(8) $(x \vee x) \Rightarrow x$, ... $(H.A)_1$.

(9) $(\beta \vee \beta) \Rightarrow \beta$, ... Substitution $(x := \beta)$ dans (8).

(10) $\Big[\overline{(\beta \vee \alpha)} \vee (\beta \vee \beta)\Big] \Rightarrow \Big[\overline{(\beta \vee \alpha)} \vee \beta\Big]$, ... Règle IV.

(11) $\Big[(\beta \vee \alpha) \Rightarrow (\beta \vee \beta)\Big] \Rightarrow \Big[(\beta \vee \alpha) \Rightarrow \beta\Big]$, ... Abréviation $\Rightarrow$.

(12) $(\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow \Big[(\beta \vee \alpha) \Rightarrow \beta\Big]$, ... Règle S(7, 11).

(13) $(\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow \Big[(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta\Big]$,..... Abréviation $\Rightarrow$..

■

5. Montrons que : $\vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha})$.
Preuve :

(1) $(x \vee y) \Rightarrow (y \vee x)]$, ... Théorème 13.

(2) $(\overline{\alpha} \vee \beta) \Rightarrow (\beta \vee \overline{\alpha})]$, ... Substitution $(x := \overline{\alpha}, y := \beta)$.

(2) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha})$, ... Abréviation $\Rightarrow$.

■

6. Montrons que : $\vdash \alpha \Rightarrow \Big[\overline{\beta} \Rightarrow \overline{(\alpha \Rightarrow \beta)}\Big]$.
Preuve :

(1) $x \vee (y \vee z) \Leftrightarrow (x \vee y) \vee z$, ... Théorème 6.

(2) $\Big[x \vee (y \vee z) \Rightarrow (x \vee y) \vee z\Big] \wedge \Big[(x \vee y) \vee z \Rightarrow x \vee (y \vee z)\Big]$, ... Définition $\Leftrightarrow$.

(3) $\Big[(x \vee y) \vee z \Rightarrow x \vee (y \vee z)\Big]$, ... Règle V.

(4) $\Big[(\overline{\alpha} \vee \overline{\overline{\beta}}) \vee \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)}\Big] \Rightarrow \overline{\alpha} \vee (\overline{\overline{\beta}} \vee \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)})$, ... Substitution $(x := \overline{\alpha}, y := \overline{\overline{\beta}}, z := \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)})$.

(5) $\beta \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}$, ... Théorème de la question 2.

(6) $(\overline{\alpha} \vee \beta) \Rightarrow (\overline{\alpha} \vee \overline{\overline{\beta}})$, ... Règle IV.

(7) $\overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)} \vee (\overline{\alpha} \vee \overline{\overline{\beta}})$, ... Définition $\Rightarrow$.

(8) $(\overline{\alpha} \vee \overline{\overline{\beta}}) \vee \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)}$, ... Règle III.

(9) $\overline{\alpha} \vee \Big[\overline{\overline{\beta}} \vee \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)}\Big]$, ... Modus Ponens (8, 4).

(10) $\alpha \Rightarrow \Big[\overline{\overline{\beta}} \vee \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)}\Big]$, ... Définition de $\Rightarrow$.

(11) $\alpha \Rightarrow \Big[\overline{\beta} \Rightarrow \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)}\Big]$, ... Définition de $\Rightarrow$.

(12) $\alpha \Rightarrow \Big[\overline{\beta} \Rightarrow \overline{(\alpha \Rightarrow \beta)}\Big]$, ... Définition de $\Rightarrow$.

■

7. Montrons que : $\vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \Big[(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta\Big]$.

Preuve :

(1) $(\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow \Big[(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta\Big]$; ..... Théorème démontré dans la question 4.

(2) $(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})$, ... Théorème démontré dans la question 5.

(3) $\overline{\overline{\beta}} \Rightarrow \beta$, ... Théorème démontré dans la question 1.

(4) $(\overline{\overline{\alpha}} \vee \overline{\overline{\beta}}) \Rightarrow (\overline{\overline{\alpha}} \vee \beta)$, ... Règle IV.

(5) $(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}) \Rightarrow (\overline{\alpha} \Rightarrow \beta)$, ... Abréviation $\Rightarrow$.

(6) $(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\overline{\alpha} \Rightarrow \beta)$, ... Règle S (2, 5).

(7) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\overline{y} \Rightarrow \overline{x})$, ... Théorème 5.

(8) $\Big[(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\overline{\alpha} \Rightarrow \beta)\Big] \Rightarrow \Big[\overline{(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta)} \Rightarrow \overline{(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)}\Big]$, ... Substitution $x := (\overline{\beta} \Rightarrow \alpha), y := (\overline{\alpha} \Rightarrow \beta)$.

(9) $\overline{(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta)} \Rightarrow \overline{(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)}$, ... Modus Ponens (6, 8).

(10) $\beta \vee \overline{(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta)} \Rightarrow \beta \vee \overline{(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)}$, ... Règle IV.

(11) $x \vee y \Rightarrow y \vee x$, ... $(H.A)_3$.

(12) $\overline{(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta)} \vee \beta \Rightarrow \beta \vee \overline{(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta)}$, ... Substitution $x := \overline{(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta)}, y := \beta$ dans (11).

(13) $\overline{(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta)} \vee \beta \Rightarrow \beta \vee \overline{(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)}$, ... Règle S (12, 10).

(14) $\beta \vee \overline{(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)} \Rightarrow \overline{(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)} \vee \beta$, ... Substitution $x := \beta, y := \overline{(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)} dans (11)$.

(15) $\overline{(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta)} \vee \beta \Rightarrow \overline{(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)} \vee \beta$, ... Règle S (12, 14).

(16) $\Big[(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta\Big] \Rightarrow \Big[(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta\Big]$, ... Abréviation $\Rightarrow$.

(17) $(\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow \Big[(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta\Big]$, ... Règle S (1, 16).

(18) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha})$, ... Théorème 5.

(19) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \Big[(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta\Big]$, ... Règle S (18, 17).

■

Exercice 3 :

On a le système d'axiomes suivant :

$$\begin{cases} A_1 : \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha); \\ A_2 : \Big[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\Big] \Rightarrow \Big[(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\Big]; \\ A_3 : (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta); \\ \text{Modus Ponens} : \vdash \alpha \text{ et } \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ alors, } \vdash \beta. \end{cases}$$

1. Montrons que : $\vdash \alpha$, on déduit $\vdash (\beta \Rightarrow \alpha)$, ... $\mathcal{R}_1$.

Preuve :

(1) $\vdash \alpha$, ... Hypothèse.
(2) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$, ... A_1.
(3) $(\beta \Rightarrow \alpha)$, ... Modus Ponens (1, 2).

■

2. Montrons que de $\vdash (\alpha \Rightarrow \beta)$, et $\vdash (\beta \Rightarrow \gamma)$, on déduit $\vdash (\alpha \Rightarrow \gamma)$, ... $\mathcal{R}_2$.
Preuve :

(1) $\alpha \Rightarrow \beta$, ... hypothèse 1.
(2) $\beta \Rightarrow \gamma$, ... hypothèse 2.
(3) $\Big[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\Big] \Rightarrow \Big[(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\Big]$, ... A_2.
(4) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$, $\mathcal{R}_1$ appliquée à (2)(Substitution de $\alpha := (\beta \Rightarrow \gamma)$ et $\beta := \alpha$ dans $\mathcal{R}_1$.
(5) $\Big[(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\Big]$, ... Modus Ponens (4, 3).
(6) $(\alpha \Rightarrow \gamma)$, ... Modus Ponens (1,5).

■

3. Montrons que de $\vdash \Big[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\Big]$, on déduit $\vdash \beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$, ... $\mathcal{R}_3$.
Preuve :

(1) $\Big[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\Big]$, ... Hypothèse.
(2) $\Big[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\Big] \Rightarrow \Big[(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\Big]$, ... A_2.
(3) $\Big[(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\Big]$, ... Modus Ponens (1, 2).
(4) $\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$, ... A_1.
(5) $\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$, ... $\mathcal{R}_2$ appliquée à (4) et (3).

■

Exercice 4 :
Démontrons en utilisant les résultats de l'exercice précédent les théorèmes suivants :
1. $(q \Rightarrow r) \Rightarrow \Big[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big]$. C'est le théorème 17 qu'on va démontrer avec les axiomes données.
Preuve :

(1) $\Big[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\Big] \Rightarrow \Big[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big]$, ... Substitution $(\alpha := p, \beta := q, \gamma := r)$ dans A_2.
(2) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow \Big[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\Big]$,..... Substitution $(\alpha := (q \Rightarrow r), \beta := p$ dans A_1.
(3) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow \Big[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big]$, ... $\mathcal{R}_2$ appliquée à (2) et (1).

■

2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \Big[(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big]$. C'est le théorème 18 qu'on va démontrer avec les axiomes données.
Preuve :

(1) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow \Big[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big]$, ... Théorème démontré précédemment dans la question 1.
(2) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \Big[(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\Big]$, ... $\mathcal{R}_3$ appliquée à (1).

■